

O SISTEMA DE LORENZ E O DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO. Moreno Pereira Bonutti, Rita de Cássia Pavani Lamas – Matemática – Departamento de Matemática – Instituto de Biologia Letras e Ciências Exatas – Campus de São José do Rio Preto.

Um importante problema de meteorologia envolve a atmosfera terrestre, que é mais quente na base do que no topo. Ao investigar este fenômeno Edward N. Lorenz foi levado a um sistema autônomo não-linear de terceira ordem, o qual depende de três parâmetros σ , r e b , reais e positivos. Neste trabalho apresentaremos como foi obtido o Modelo de Lorenz, uma análise sobre a Coerência do Modelo, e será apresentada ainda uma análise sobre a natureza das soluções do sistema variando o parâmetro r , com $\sigma = 10$ e $b = 8/3$. Obteremos desta forma o Diagrama de Bifurcação do sistema. O trabalho possibilitará que leitores interessados na área de sistemas dinâmicos tenham conhecimento de comportamentos complexos apresentados pelo sistema, chamados de caóticos, o que favorecerá no estudo de outros sistemas não-lineares.

O Modelo de Lorenz

Convenção de Rayleigh-Bénard

Considere uma camada de fluido com extensão horizontal infinita. As equações não dimensionalizadas descrevem um duplo transporte do momento do fluido, através da velocidade $\vec{v}(\vec{r}, t)$ e através da perturbação da temperatura $\theta(\vec{r}, t)$ que são:

$$\text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \theta \vec{\lambda} + \nabla^2 \vec{v}$$

$$\nabla \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \nabla \theta = Ra \vec{\lambda} \vec{v} + \nabla^2 \theta, \text{ com } Ra = \left(\frac{\rho_0 g \alpha d^3}{\eta D_T} \right) \delta T, \text{ e } \text{Pr} = \frac{\nu}{D_T}.$$

Temos ainda, η : viscosidade dinâmica do fluido, α : coeficiente da expansão do fluido, ρ_0 : densidade média do fluido, g : aceleração gravitacional.

A presença do operador diferencial ∇ significa que as equações acima são equações diferenciais parciais não muito fáceis de trabalhar. Tais equações serão transformadas em um conjunto finito de equações diferenciais, isto é, um fluxo. Para isto é necessário determinar os modos instáveis que não incluem satisfatoriamente as não linearidades quando há flutuações de amplitudes finitas. Várias regras ajudam na seleção dos modos.

Derivação do Modelo de Lorenz

A simplificação mais imediata consiste no uso da convenção de Rayleigh-Bénard. Usando essa convenção e o Método de Galerkin, Lorenz chegou no sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(-x + y) \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases}$$

o qual é chamado Sistema de Lorenz.

Diagrama de Bifurcação

No sistema de Lorenz, a variável x está relacionada à intensidade do movimento do fluido, enquanto as variáveis y e z estão relacionadas à variação de temperatura nas direções horizontal e vertical.

Faremos agora uma análise sobre a natureza das soluções do sistema variando o parâmetro r , com $\sigma = 10$ e $b = 8/3$. Neste caso, os pontos críticos são:

$$\begin{cases} P_1 = (0, 0, 0) \\ P_2 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \\ P_3 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1) \end{cases}.$$

Quando $r = 1$, os três pontos se coincidem. A medida que r aumenta, P_1 se bifurca e os outros dois pontos P_2, P_3 aparecem. Analisaremos o sistema linear, $U' = AU$, com A sendo a

matriz Jacobiana do sistema, nos pontos de equilíbrio, e U o vetor $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$, com

$P = (x_0, y_0, z_0)$ ponto de equilíbrio, para determinar o comportamento local das soluções na vizinhança de cada ponto crítico. A matriz Jacobiana do sistema é dada por:

$$\begin{pmatrix} \sigma & -\sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

Análise do ponto P_1 :

Os autovalores são $\lambda_1 = -\frac{8}{3}$, $\lambda_2 = \frac{-11 - \sqrt{81 + 40r}}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{-11 + \sqrt{81 + 40r}}{2}$. Todos os três autovalores são negativos quando $r < 1$. Então a origem é assintoticamente estável, neste domínio de r . No entanto, λ_3 muda de sinal quando $r = 1$ e é positivo para $r > 1$. A origem é instável para $r > 1$.

Análise do ponto P_2 :

Os autovalores são determinados através da equação:

$$3\lambda^3 + 41\lambda^2 + 8(r+10)\lambda + 160(r-1) = 0.$$

As soluções de dependem de r da seguinte forma:

Para $1 < r < r_1 \cong 1,3456$, existem três autovalores reais e negativos.

Para $r_1 < r < r_2 \cong 24,737$, existe um autovalor real negativo e dois autovalores complexos com parte real negativa.

Para $r > r_2$, há um autovalor real negativo e dois autovalores complexos com parte real positiva.

Análise do ponto P_3 :

Os mesmos resultados são obtidos no caso do ponto crítico P_3 .

Para $0 < r < 1$, o único ponto crítico é P_1 e é um ponto assintoticamente estável. Todas as soluções se aproximam deste ponto (origem) quando $t \rightarrow \infty$.

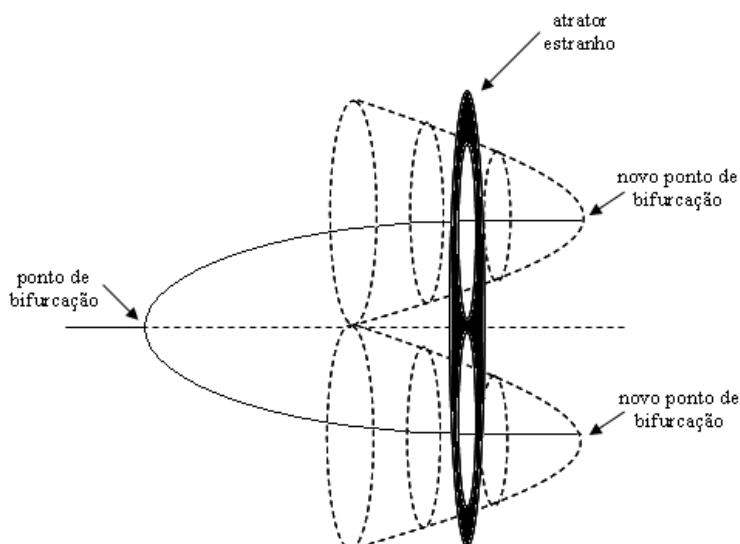
Para $1 < r < r_1$, os pontos P_2, P_3 são assintoticamente estáveis e P_1 é instável. Todas as soluções aproximam-se de P_2 ou P_3 .

Para $r_1 < r < r_2$, os pontos P_2 e P_3 são assintoticamente estáveis e P_1 é instável. Todas as soluções na vizinhança aproximam-se para P_2 e P_3 , onde a maior parte delas espirala para o ponto crítico.

Para $r_2 < r$ todos os três pontos críticos são instáveis. As soluções vizinhas a P_2 ou P_3 espiralam para longe do ponto crítico. Quando consideramos as soluções com r um pouco maior que r_2 , o ponto P_1 tem um autovalor positivo e cada ponto P_2 e P_3 tem um par de autovalores complexos com parte real positiva, ou seja, os pontos são instáveis.

Como os pontos são instáveis as trajetórias tenderiam ao infinito para grandes valores de t , porém no caso das equações de Lorenz as trajetórias se mantêm limitadas para $t \rightarrow \infty$. Na realidade a afirmação não vale apenas para $r > r_2$, mas sim $\forall r > 0$.

Desta forma, o diagrama de bifurcação para o modelo de Lorenz é como segue:



Os conteúdos aqui desenvolvidos serão de fundamental importância para o estudo de demais sistemas não analisados neste trabalho.

Referências Bibliográficas

1. Alligood, K.T., Sauer, T.D. e Yorke, J.A. Chaos An Introduction to Dynamical Systems. Springer-Verlag, New York, 1996.
2. Bergé, Pierre, P.Y, V.C. Order within Chaos, France, 1984.
3. Boyce, W.F. & DiPrima, R.C. - Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Livros Técnicos e Científicos, 2002.
4. Devaney, R.L. An Introduction to chaotic Dynamical Systems, USA, 1989.
5. Hale, J. and Koçak, H. Dynamics and Bifurcations, 1991, Springer –New York.

Bolsa: CNPq/PIBIC